投稿

潮汐力は共通重心周りの遠心力で起こるのではない

半田　利弘（東京大学天文学教育研究センター）

1. 潮汐の説明

潮の満ち引きは、島国である日本では身近な現象と見られるためか、多くの初学者向け天文解説書で説明がなされている。そのいくつかは、月が地球の各部に及ぼす重力と、地球が月との共通重心の周りを公転運動する際に生ずる遠心力の関係で生じるとしている。私が子どもの頃から、この説明は多くの子ども向け書籍で紹介されていたが、これを「月に近い側が出っ張るのは月の重力が強いためで、遠い側に出っ張るのは共通重心周りの遠心力のため」と受け取っている人が多いのではないだろうか。私自身、そのように解釈していた。しかし、それだと地球の両側で潮汐力の大きさが一致することが説明できない感じがして、その後も長い間にわたって違和感があった。

先日、図鑑[1]を執筆する際に潮汐現象の解説を書くことになり、この説明を確かめようと、上記の説明に従って素直に計算するとおかしな結論になることに気づいた。複数の天文研究者との議論を交えて子細に検討した結果、「共通重心周りの遠心力」というのが誤りの原因があることがわかった。しかし、そのような議論を明確に示した文章を殆ど見かけないことから、本稿を投稿することにした。式が正しいかを確かめるには大学教養程度の力学の知識が必要だが、それを受け入れて頂けるならば論理の流れはできるだけ平易に記載したつもりなので、本稿のタイトルを見て疑問を感じた方は是非ご一読願いたい。

2. 基本的なパラメータとその見積もり

まず、最初に地球と月の運動に関する基本的なパラメータを確認しよう。簡単のため、地球も月も真球であるとし、月は円軌道上を等速運動すると考える。今回の議論では、これは悪い近似ではない。

地球と月の距離 d は一定で実長では 38 万 km である。地球と月の共通重心位置を求めてみる。地球の幾何学中心と共通重心との距離を xd とすると、$x = M_\mathrm{m}/(M_\mathrm{m}+M_\mathrm{e})$である。ここで、$M_\mathrm{m}$、$M_\mathrm{e}$ はそれぞれ月と地球の質量を表す。表式を簡単にするために、$m = M_\mathrm{m}/M_\mathrm{e}$ とおけば、$x = m/(1+m)$となる。実際の値としては $m = 1/81$ なので $xd = 4600$ km になる。これはかなりの長さではあるが、地球の半径 $R = 6400$ km より小さい。つまり、共通重心は地球の中にあるわけだ。

遠心力の話に入る前に月が地球の各部に及ぼす重力を先に見積もっておこう。重力定数（万有引力定数）を G とすると、月直下の地球上（以下 N 点とする）、地球の幾何学中心（以下 C 点とする）、月から最も遠い地球上（以下 F 点とする）の 3 点で感じる月の重力は、重力加速度として表現すれば、いずれも月に向かう方向で、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
g_\mathrm{near} &= \frac{GM_\mathrm{m}}{[(1-r)d]^2} \\
g_\mathrm{center} &= \frac{GM_\mathrm{m}}{d^2} \\
g_\mathrm{far} &= \frac{GM_\mathrm{m}}{[(1+r)d]^2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

となる。ただし、ここでは文字を減らすために$R=rd$と置いた。ここで、N，C，Fの各点は、そこに置かれた自由運動する試験粒子を指すのであって、地球に固定された各地点の実際の運動を示すわけではないことに留意されたい。

3. 遠心力とその効果

遠心力は慣性力の１つであり、その大きさf_{centri}は、観測系の慣性系に対する角速度をωとすると、回転中心から距離 r にある地点に対して$f_{\mathrm{centri}}=r\omega^2$となる。つまり、回転中心からの距離に応じて強さが変わるわけだ。

共通重心周りの遠心力を考える場合、ωは月の公転角速度となる。月の公転周期27.3日を用いると、実際の値は$\omega=2.7\times10^{-6}$ rad／secである。また、重力で引き合っている共通重心周りの運動であるから、ωは当然、d、M_{m}、M_{e}で表現できる。重力と遠心力の釣り合いと考えても共通重心周りの地球や月の円運動の運動方程式と考えても結果は同じで、$G M_{\mathrm{m}} M_{\mathrm{e}}/d^2 = M_{\mathrm{e}}xd\omega^2$から、$\omega^2=GM_{\mathrm{m}}/(xd^3)= G(M_{\mathrm{e}}+M_{\mathrm{m}})/d^3$と求まる。

系の回転中心は共通重心ということを思い出して、この周りを回転するN，C，F3点での遠心力を見積もってみると、

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{near}} &= -(R-xd)\omega^2 \\
f_{\mathrm{center}} &= xd\omega^2 \\
f_{\mathrm{far}} &= (R+xd)\omega^2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となる。ここで符号は月から遠ざかる方向を正とした。今回の場合、共通重心がNC間にあるので、f_{near}の値は実際には負になる。

最初に示した"私の当初の理解"では、共通重心周りの遠心力によって潮汐力が生じるはずだった。そこで、遠心力と月の重力との合力を求めてみると（両者は逆向きを正として符号を決めたので和は差になり）、

$$
\begin{aligned}
h'_{\mathrm{near}} &= f_{\mathrm{near}} - g_{\mathrm{near}} \\
&= -(R-xd)\omega^2 - \frac{GM_{\mathrm{m}}}{[(1-r)d]^2} \\
h'_{\mathrm{center}} &= f_{\mathrm{center}} - g_{\mathrm{center}} \\
&= xd\omega^2 - \frac{GM_{\mathrm{m}}}{d^2} \\
h'_{\mathrm{far}} &= f_{\mathrm{far}} - g_{\mathrm{far}} \\
&= (R+xd)\omega^2 - \frac{GM_{\mathrm{m}}}{[(1+r)d]^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる。ただし、h' の符号は月から遠ざかる方向を正とした。これまでに求めた表記を代入して式を整理すると、

$$
\begin{aligned}
h'_{\mathrm{near}} &= \frac{GM_{\mathrm{e}}}{d^2}\left[-r(1+m)+m-\frac{m}{(1-r)^2}\right] \\
h'_{\mathrm{center}} &= 0 \\
h'_{\mathrm{far}} &= \frac{GM_{\mathrm{e}}}{d^2}\left[r(1+m)-m-\frac{m}{(1+r)^2}\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となる。

ここで、$r\ll1$の仮定の元で1次近似してみよう。すると、

$$
h'_{\mathrm{far}} = -h'_{\mathrm{near}} = \frac{GM_{\mathrm{e}}}{d^2}(1+3m)\,r \tag{5}
$$

となる。

賢明な読者の方々は、この結果がおかしいことに気づいたことだろう。上式で $m=0$ としても $h>0$ なのである。即ち、月の質量が 0 であっても有限の潮汐力が生じるということになってしまう。しかも、$m\ll1$ ならば、その強さは地球の質量に比例することになる。これはあまりに奇妙な結果ではないだろうか。

もちろん、実際に地上で観測する力には、これ以外に地球の重力および地球の自転による遠心力なども影響する。しかし、潮汐力を考える際には、N，C，F 各点での力の違いだけが問題なので、これらを無視したことが上記の結果をおかしくしている原因ではない。

4. 慣性系で考える

前節では極めて奇妙な結果が得られてしまった。潮汐力はこんな奇妙な力なのだろうか？物理的直観から、そんなはずはないことが予想される。それを確認するために、今度は慣性系で考えてみよう。

まず、N，C，F 各点に置いた試験粒子について運動方程式を立ててみよう。これらの粒子が受ける力は月の重力だけである。重力しか力が働かないので試験粒子の質量は両辺で相殺するため、運動方程式とはいっても加速度を求める式になる。実際に求めると、各点は以下に示される加速度 g で運動する。

$$g_{\rm near} = \frac{GM_{\rm m}}{[(1-r)d]^2}$$
$$g_{\rm center} = \frac{GM_{\rm m}}{d^2} \qquad (6)$$
$$g_{\rm far} = \frac{GM_{\rm m}}{[(1+r)d]^2}$$

ただし、符号は第2節に合わせて月に向かう方向を正とした。

地球が剛体だと考えると、地表に固定された観測者はC点と一緒に運動する。そこで、この立場に立って、N点やF点に置かれた自由粒子がどのように運動して見えるのかを考えてみよう。もちろん、これは各点の運動とC点の運動との差とすればよい。なぜなら、時々刻々の両者の位置関係はどこから見ても同じはずだからである。両者とも加速度運動しているから、相対運動はその差で加速度運動をしていることになり、その大きさh''は、

$$\begin{aligned} h''_{\rm near} &= g_{\rm near} - g_{\rm center} \\ &= \frac{GM_{\rm m}}{[(1-r)d]^2} - \frac{GM_{\rm m}}{d^2} \\ &= \frac{GM_{\rm m}}{d^2}\left[-1 + \frac{1}{(1-r)^2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''_{\rm far} &= g_{\rm far} - g_{\rm center} \qquad (7) \\ &= \frac{GM_{\rm m}}{[(1+r)d]^2} - \frac{GM_{\rm m}}{d^2} \\ &= \frac{GM_{\rm m}}{d^2}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^2}\right] \end{aligned}$$

となる。$r \ll 1$として1次近似すれば、

$$h''_{\rm far} = -h''_{\rm near} = \frac{2GM_{\rm m}r}{d^2} = \frac{2GM_{\rm m}R}{d^3} \qquad (8)$$

である。この結果が示すことは、N点やF点に置かれた粒子は、他から何も力を受けなくても、C点といっしょに運動する地表に対して加速度h"で運動していくということだ。これを月の重力も共通重心周りの運動も忘れて、見たままに表現しようとすると、「なんらかの力に引かれてN点やF点に置かれた粒子が地表に対して加速度h''で運動する」ということになる。この“なんらかの力”を潮汐力と呼ぶのである。

この結果は前節で求めたものとは質的に全く異なっている。今度の結果だと月の質量が0なら潮汐効果も0となり、強さは地球の半径に比例する。また、月との距離の3乗に反比例して減少する。これが正しい潮汐力の大きさであり、月の重力と共通重心周り遠心力だけから求めた、前節の結論はやはり誤っていたことがわかる。

5. 忘れていたコリオリ力

しかしながら、慣性力を適切に導入すれば、どんな系から見ても同じ結果が得られるはずである。では第 3 節では何がいけなかったのだろうか？力学の教科書を見直してみると、回転系から見た場合に生じる慣性力には遠心力の他にコリオリ力があることがわかる。念のため、式で示すと以下のようになる。

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}'}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{f}'}{m} - 2\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}') \quad (9)$$

ここで、右辺第 2 項がコリオリ力、第 3 項が

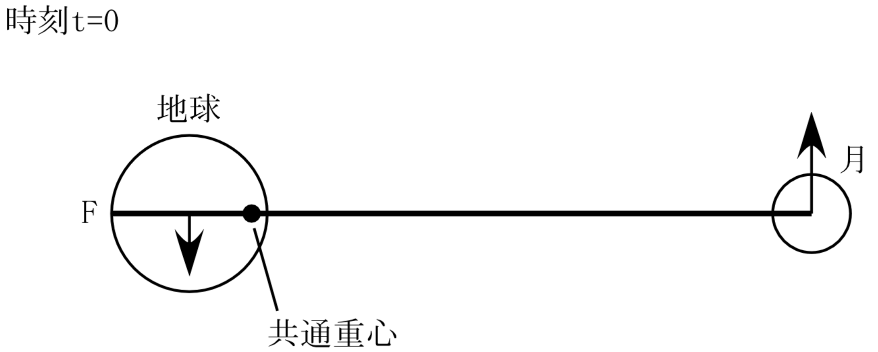


図１　地球と月の運動。時刻 t＝0 の場合のようす。

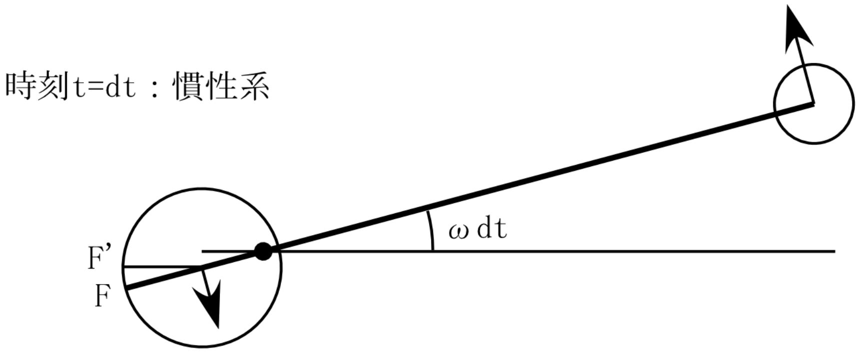


図２　慣性系から見た、微少時間 dt 後のようす。

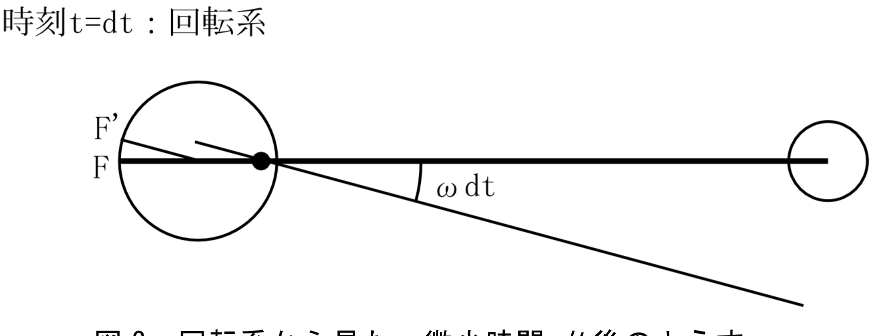


図３　回転系から見た、微少時間 dt 後のようす。

遠心力である。

コリオリ力はフーコーの振り子や台風の渦巻などの説明に登場するが、遠心力よりはずっと弱いから今回のような場合は無視して良いと思いがちだ。しかし、(9)式を見れば、そうではないことがわかる。注目している粒子が系 x'に対して運動していればコリオリ力は 0 にならず、運動が十分に速ければ無視できないのである。車がカーブをきるときやバケツを回転させるときの説明が遠心力だけ足りるのは、登場する質点が全て停止するように回転系を設定していたのでコリオリ力が 0 になっていたのである。つまり、コリオリ力が無視できるのはこうした場合に限られる。

それでは、果たして潮汐力の場合はどうなのであろうか？

時刻 t＝0 に於ける地球と月の配置を図１に示した。ここから微少時間 dt の後のようすを慣性系と回転系とで示したのが図２および図３である。

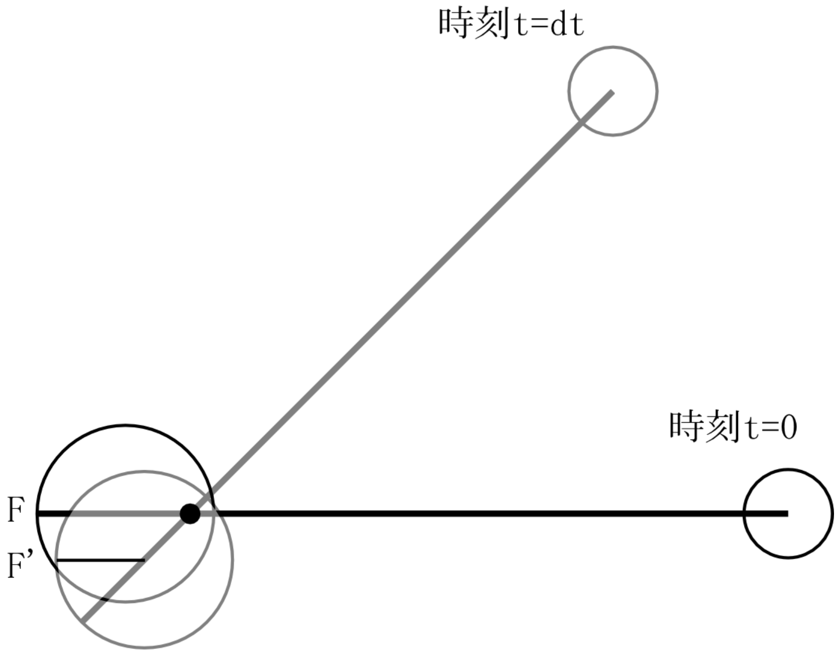


図 4　慣性系から見た F 点の運動。F 点に対応する点 F' は常に地球の中心 C から、この図で同じ方向に地球半径だけ左に移動した場所になる。

第 3 節で遠心力を考えた際に、我々は図 1 での点 F は図 3 での点 F になると考えていたのではないだろうか？この場合、点 F は回転系で移動しないからコリオリ力は 0 である。ところが、図 2 を見ると、この対応はおかしいことがわかる。地球が自転していなければ点 F にあった粒子は点 F'に移動すべきなのである。なので、図 3 でも点 F'への移動を考えるのが正しいのだ。（もちろん、実際の地球は自転しているが、先も述べたように、潮汐力を考える場合には、地球が全く自転していない場合を考えるべきなのだ。）とすると、図から、その移動量は $R\omega dt$ であることがわかる（R は地球の半径）。

ここから、(9)式に戻って遠心力とコリオリ力を見積もってみると、それは遠心力に匹敵する大きさであることがわかる。つまり、潮汐力を考える場合、コリオリ力は無視できないのである。この先の計算は多少めんどうなので、割愛して結論だけを述べると、(7)式と全く同じ結果を導くことができる。つまり、第 3 節の間違いはコリオリ力を無視したことに原因があったのである。

6. 再び遠心力の立場から

前節の説明は、第 3 節の説明を修正しようという方針で展開したので、かなり難解になっている。慣性力を考えている系に対して潮汐力を計算した点が複雑な運動をしていることがその原因である。それでは計算しようとしている点（例えば F 点）を固定する系を直接考えたらどうなるのであろうか？そうすれば各点の速度は常に 0 になるのでコリオリ力は 0 になり、話が簡単になる可能性がある。

この場合、慣性系に対して地球が自転していないとして、地球上の各点はどのように運動するだろうか？今度は、ある時刻に F 点だった点を地表に固定させた場合の軌跡を考える必要がある。この節では同じ F 点と呼んでいても、第 2 節で定義し前節までに使っていた点 F にあった自由粒子の運動を考えているわけではないことに注意して欲しい。

運動を見やすくするために、異なる時刻での様子を重ねると図 4 のようになる。さらに

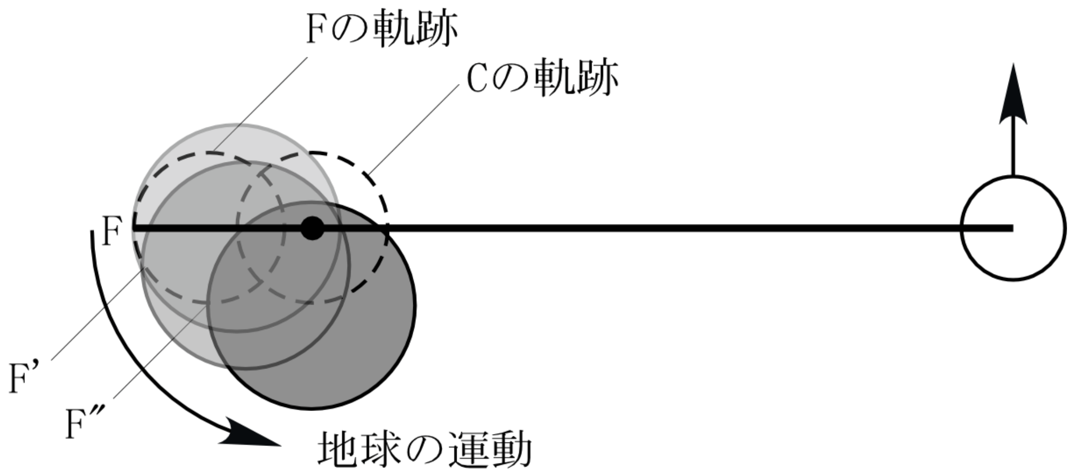


図 5　慣性系から見た地球上の各点の運動。F 点にあった地表に固定された点は F→F'→F″と移動し、月-地球系が一回転する間に破線で示した軌跡を描く。これは図上に示した C 点の軌跡と同じ大きさの円となる。

時間を追っていくと、$t=0$ で F 点にあった点は、月－地球系全体が一回転する間に図 5 に示す軌跡を描くことになる。C 点と F 点との相対位置関係を考えると、F 点の軌跡は C 点の軌跡と同じ大きさ（半径 xd）の円となり、そこを同じ角速度 ω で回転していることがわかる。N 点についても同じことが言え、地表のどの点も C 点の軌跡と同じ大きさ（半径 xd）の円上を角速度 ω で回転していることになる。（本当は、動画で示した方がわかりやすいのだが、連結棒で繋がれた蒸気機関車の動輪の運動を見れば理解しやすいかも知れない。1 つの車輪と棒の連結点が C 点に当たり、前後にある別の車輪と棒の連結点が F 点や N 点に当たる。）

こうして見ると、地球上の各点は、大きさと回転速度は同じだが、それぞれ中心が異なる円運動をしているということがわかる。（先ほどのたとえだと、各点とも別の車軸の周りを回っていることに対応する。）つまり、これらの点は共通重心の周りを円運動しているわけではないのだ。そこで、この運動の回転中心を中心とした回転系を各点ごとに考えると、それが求めていた非慣性系である。

この系は、慣性系に対して、半径 xd、角速度 ω で回転しており、力を考えたい点はこの系に関して静止している。このため、慣性力は遠心力だけでよく、それは $f_{\mathrm{centri}}=xd\,\omega^2$ となる。これを(3)式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
h'_{\mathrm{near}} &= \frac{GM_{\mathrm{m}}}{d^2}\left[-1+\frac{1}{(1-r)^2}\right] \\
h'_{\mathrm{center}} &= 0 \\
h'_{\mathrm{far}} &= \frac{GM_{\mathrm{m}}}{d^2}\left[1-\frac{1}{(1+r)^2}\right]
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

となり、めでたく(7)式と一致する。

7. 誤解の元と解説方法

以上の議論から明らかとなったのは、回転系で考慮する場合には、慣性力を考慮しようとしている各点がその座標系上で運動している場合にはその方向が回転軸と並行でない限りコリオリ力は無視できないということ、あるいは、その点が慣性系に対してどのように運動するかに戻って各点ごとに自分自身を静止させるような回転系を設定してから遠心力を評価する必要があるということである。

「地球と一緒に運動するのだから地球の中

心が受ける遠心力と同じ遠心力を受けるのだ」と単純に考えがちだが、(9)式の遠心力の項は x'すなわち回転の原点からの位置に依存するのである。つまり、遠心力は系に対して一様に働くわけではないのだ。

そこで、回転座標系を各点ごとに設定するという第6節の発想に気づかないと、第5節のようにコリオリ力までちゃんと考えなければ矛盾が生じてしまうのである。しかし、従来の遠心力による説明方法では、この部分に発想の飛躍が必要なことがあまり意識されていないのでは無かろうか。ここに気づくことは、系の変換によって生じる慣性力という概念よりも、高度な発想が必要であるように私には思われる。

ところで、第6節の論法で、地表の点について、それぞれの系に基づく遠心力がすべて一致するのは偶然なのだろうか？もちろん、そんなことはない。実際、円運動でなくても慣性力は完全に一致するのである。地表の各点はC点と一緒に運動するので、これらの点は全て慣性系に対して同一の運動をする。そこで、慣性力はすべて同じになるのである。先ほどの「どこでも遠心力は同じではないか」という“単純な考え”はこれを意識しているために生じるのであろう。しかし正しくは、「地球と一緒に運動するのだから地球の中心が受ける慣性力と同じ慣性力を受ける」のである。(回転系であっても) 慣性力は遠心力だけではないから、この違いは認識すべきである。

それならば、慣性力を遠心力とコリオリ力とに分解せずに、最初から全て「見かけの力」として説明しようとしたらどうであろうか？慣性力は、交通機関が発達した今日では、急カーブを切った際の自動車内のようすなどから、子どもでも日常的に経験している現象である。自動車ならば車内・車外それぞれから見た様子を想像するのは案外たやすいかも知れない。子どもや初学者には“視点の移動”が理解できないとする教育者も多いようだが、30〜40 年前とは社会環境が著しく変わってきているのだから、乗り物のたとえを使えば理解可能な人は多いのではないだろうか。

例えば､「月の重力によって地球も振り回されている。このため、地球全体が月の方向にカーブして進んでしまうのだが、地球上の全ての物体は、それ自身が月の重力で引かれる程度にしかカーブしようとしない。そこで、月から遠く働く重力が弱い側ではそこにある物体よりも地球全体の方が急カーブし、月に近く働く重力が強い側ではそこにある物体の方が地球全体よりも急カーブしてしまう。この結果、地球の両側で地表の物体が地球から離れる方向に力を受けているように見える。この見かけの力が潮汐力である｡」とする説明ではどうだろうか。結局、先に述べた図鑑の解説では、この論理展開による解説を試みたが､文章力不足から必ずしも成功していない。しかし、私より日本語に長けた読者の方々ならば、より上手な説明文に修正することも可能だろう。

ここでの本筋とは離れるが、今回この議論を研究者以外の人とした際に言葉遣いの問題もあることに気づいた｡物理学上の議論では、「コリオリ力を無視して…」といえば、それは「コリオリ力の効果は他の力の効果よりも桁で影響が少ないから、これを考慮せずに単純化して考えても結果に大差は生じないので、今後は考慮しないで…」という意味である。したがって､「無視できるかどうか」は客観的に判断できることで、第5節で示したように今回の議論では､コリオリ力を無視できない。ところが、世間一般では、話題にしている力の影響の評価とは関係なく、説明する人の意識だけで「この力を無視する」ことができると捉えられているようである。専門家同士の話でない場合には、この辺りの言葉のギャッ

プにも注意を払うべきであろう。

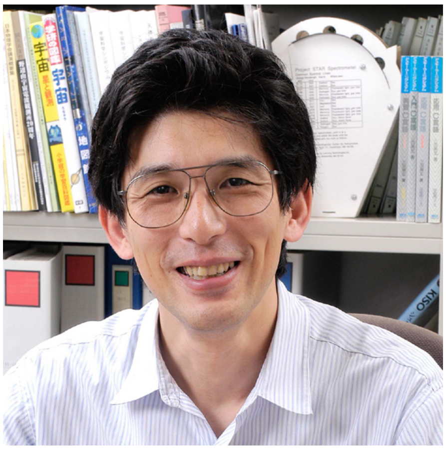
　このように考えてみると、遠心力と系の変換を駆使した従来よく見かける説明は決して平易な説明になっていないように私には思われる。むしろ、慣性系と系の乗り換えに準拠した第4節を出発点にした方が、よりわかりやすい説明にたどり着けるのではないかというのが私からの提言である。

　当然のことだが、進歩は学術的・科学的な場面だけで起こるものではない。科学の説明・解説についても進歩はあるべきである。それには､過去の説明法に囚われることなく､現代生活での実感とは何であるかを見返し､最適な説明法を常に考えるということが必要だろう。そうすることによって、その現象に対する説明者の理解も深まり、過去の説明法の有利なところにも気づくことだろう。

（謝辞）投稿の後、編集委員により、一部の式の誤りと第3節中での論理の誤りを指摘して頂きました。当初は「遠心力による説明は間違い」だと考えていたのですが、この指摘によって考えが深まり、第6節の追加と初稿が含んでいた誤りを正すことができました。やはり、多くの人々と意見交換をすることは重要だと痛感しました。ご指摘ありがとうございました。

参考文献

[1] 池内了・半田利弘・大内正己・橋本樹明、2004、『図鑑Neo宇宙』、小学館



半田利弘
handa@ioa.s.u-tokyo.ac.jp